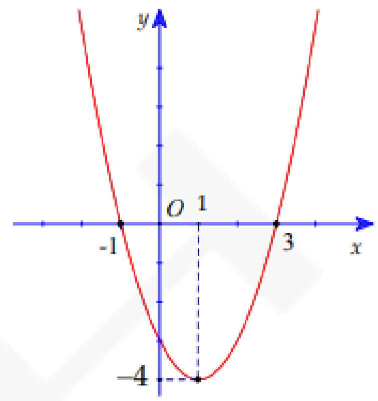
MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = f'(x)$

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=-9$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Phần nguyên của giá trị diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành là



A. 2. **B.** 27.

C. 29. **D.** 35.

Lời giải:

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua 3 điểm $(-1;0),(3;0),(1;-4)$ ta có hệ: $\begin{cases}3a-2b+c=0\\27a+6b+c=0\\3a+2b+c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\b=-1\\c=-3\end{cases}$

$$\Rightarrow f'(x)=x^2-2x-3\Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2-2x-3)dx=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$$

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=-9$ tại điểm có hoành độ x_0 nên

$f'(x_0)=0\Leftrightarrow x_0^2-2x_0-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=3\end{array}\right.$. *Do* $x_o>0\Rightarrow x_0=3$.

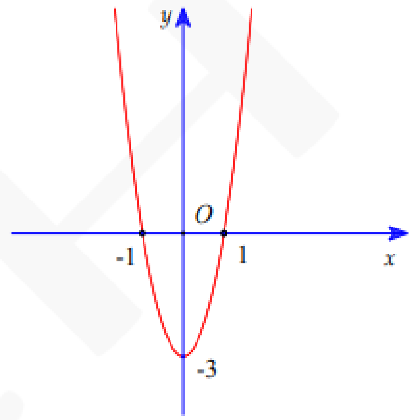
Suy ra $f(3)=-9\Leftrightarrow\frac{1}{3}(3)^3-(3)^2-3.3+C=-9\Leftrightarrow C=0\Rightarrow(C):y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_{2,3} = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int\limits_{\frac{3-3\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+3\sqrt{5}}{2}} \left|\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right| dx = 29,25$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 2. *[Sở giáo dục Hà Nội]:* Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:



Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

A. $S = 9$. **B.** $S = \frac{27}{4}$.

C. $S = \frac{21}{4}$. **D.** $S = \frac{5}{4}$.

Lời giải:

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ là hàm chẵn đối xứng qua trục tung nên $f'(-1) = f'(1) \Rightarrow b = 0$. Mà $\begin{cases} f'(0) = -3 \Rightarrow c = -3 \\ f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a + c = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

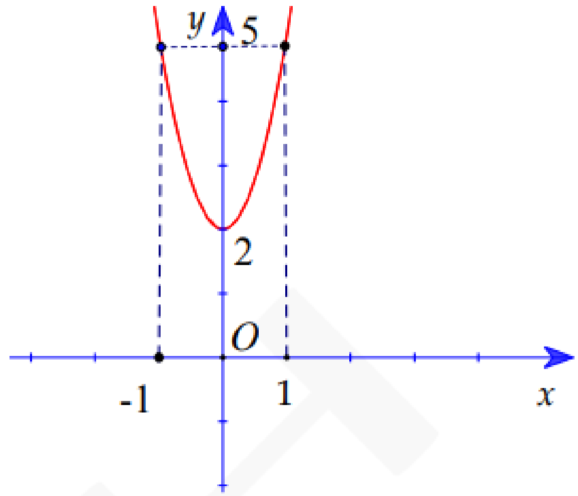
$f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x^2 - 3)dx = x^3 - 3x + C$.Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ x_0 nên $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$. *Do* $x_o < 0 \Rightarrow x_0 = -1$.

Suy ra $f(-1) = 4 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow (C): y = x^3 - 3x + 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int\limits_{-2}^{1} \left|x^3 - 3x + 2\right| dx = \frac{27}{4} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Giá trị của $f(3)-f(1)$ là



A. 24. **B.** 26.

C. 28. **D.** 30.

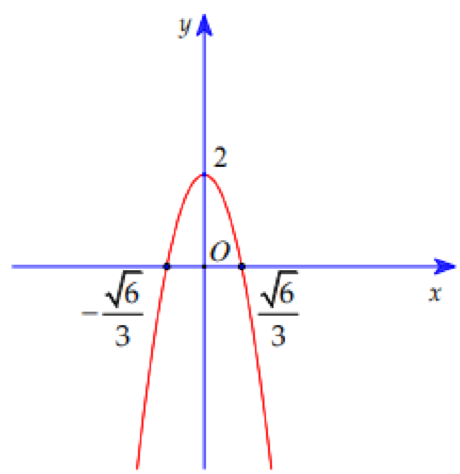
Lời giải:

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Đồ thị hàm $y=f'(x)$ là hàm chẵn đối xứng qua trục tung nên $f'(-1)=f'(1)\Rightarrow b=0$. Mà $\begin{cases} f'(0)=-3\Rightarrow c=2 \\ f'(1)=5\Rightarrow 3a+c=5\Rightarrow a=1 \end{cases}\Rightarrow f'(x)=3x^2+2$

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2+2)dx=x^3+2x+C$, đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ nên $C=0$

$\Rightarrow f(x)=x^3+2x\Rightarrow f(3)-f(1)=30\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Phần nguyên giá trị diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành là



A. 6. **B.** 4.

C. 3. **D.** 2.

Lời giải:

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Đồ thị hàm $y=f'(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow b=0$.

Mà $\begin{cases} f'(0)=2\Rightarrow c=2 \\ f'\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=0\Rightarrow 2a+c=0\Rightarrow a=-1 \end{cases}\Rightarrow f'(x)=-3x^2+2$

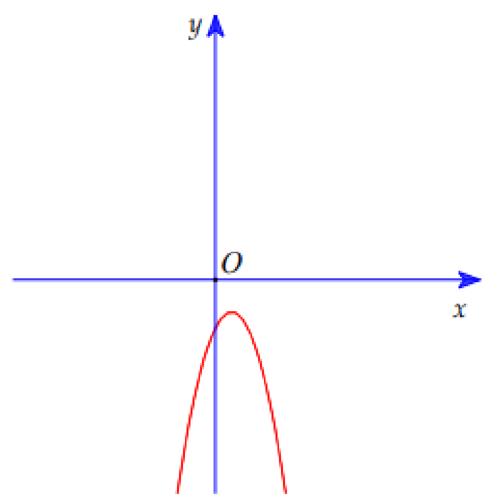
$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(-3x^2+2\right)dx=-x^3+2x+C$.

Do đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ nên $C=0\Rightarrow (C): y=-x^3+2x$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $-x^3+2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left|x^3+2x\right|dx=6$ $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Hàm số (C) có thể là hàm số nào trong các hàm số sau:



A. $y=-x^3+2x^2+x+2.$

B. $y=x^3-2x-1.$

C. $y=-x^3+2x^2-x-2.$

D. $y=-x^3+x^2-x+2.$

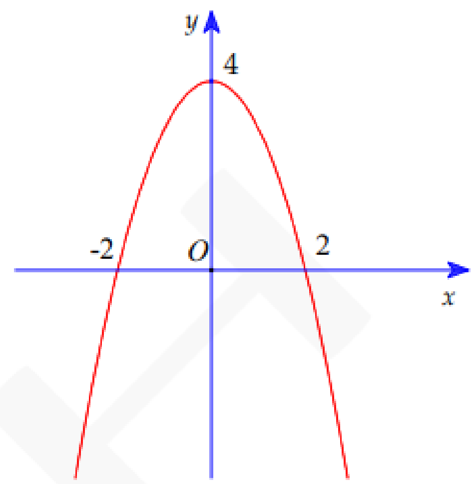
Lời giải:

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $a<0$

Mà $f'(0)<0\Rightarrow c<0$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới trục Ox nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ không có cực trị

$\Rightarrow b^2 - 3ac \le 0 \Rightarrow b^2 \le 3ac \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \ne 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = \frac{13}{3}$ tại điểm có hoành độ dương và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Giá trị $3a + 2b + c - d$ là



A. 0. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải:

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow b = 0$.

Mà $\begin{cases} f'(0) = 4 \Rightarrow c = 4 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + c = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 4$

$f(x) = \int f'(x)dx = \int(-x^2 + 4)dx = -\frac{1}{3}x^3 + 4x + C$.

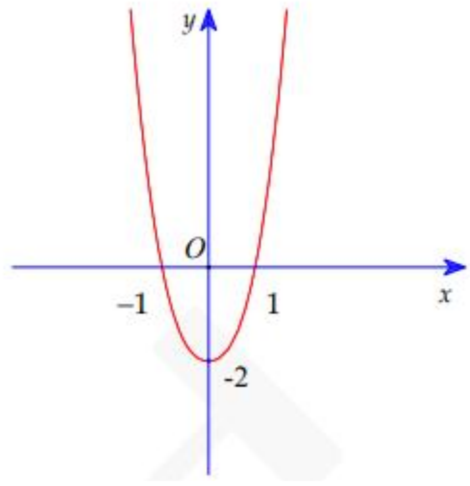
Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = \frac{13}{3}$ tại điểm có hoành độ x_0 nên

$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$. *Do* $x_o > 0 \Rightarrow x_0 = 2$.

Suy ra $f(2) = \frac{13}{3} \Leftrightarrow C = -1 \Rightarrow (C): y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x - 1 \Rightarrow 3a + 2b + c - d = 4$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 7. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\left(a \neq 0\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Đồ thị hàm số $y = f'\left(|x|\right)$ như hình vẽ bên. Biết hàm số $y = f'\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$ và 2 cực trị đều âm, hỏi đồ thị hàm số $\left(C\right)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?

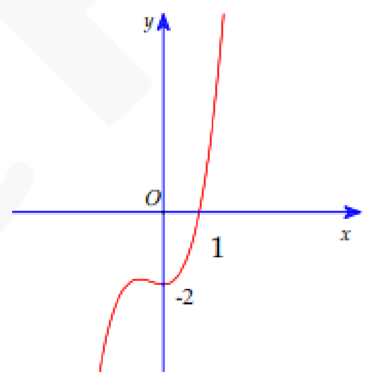


A. 0. **B.** 1.

C. 2. **D.** 4.

Lời giải:

Do hàm số $y = f'\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$ và 2 cực trị đều âm nên từ đồ thị hàm số $y = f'\left(|x|\right)$ ta có thể suy ra đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ có dạng như hình bên

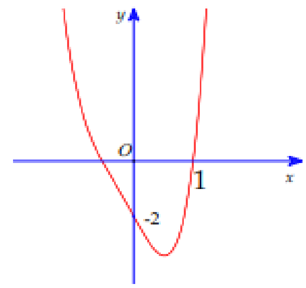


Từ đồ thị của hàm số $y = f'\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên:

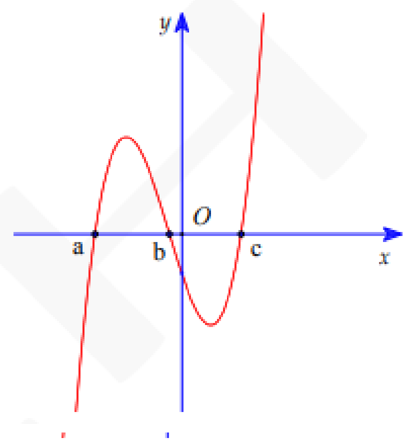
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

$y = 0$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt Ox tại nhiều nhất 2 điểm $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***
Có thể minh họa rõ hơn bằng hình vẽ



Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Biết $f\left(a\right)>0$, hỏi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?



A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Lời giải:

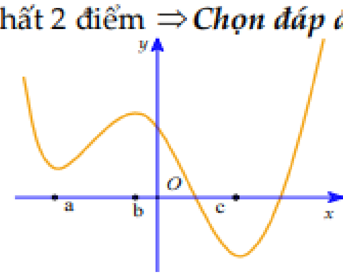
Từ đồ thị của hàm số ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0		
$f\left(x\right)$	$-\infty$	$\searrow$	$f\left(a\right)$	$\nearrow$	$f\left(b\right)$	$\searrow$	$f\left(c\right)$	$\nearrow$	$+\infty$ $y=0$

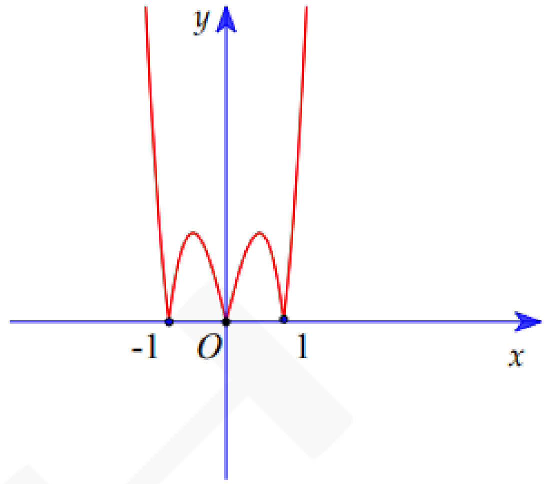
Để đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục hoành tại số điểm là nhiều nhất thì $f\left(c\right)<0$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt Ox tại nhiều nhất 2 điểm $\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Có thể minh họa rõ hơn bằng hình vẽ



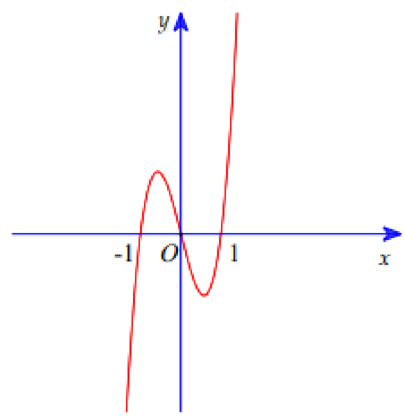
Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c\ (a>0)$ có đồ thị (C), đồ thị hàm số $y=|f'(x)|$ như hình vẽ bên. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại 2 điểm. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành là



A. $\frac{7}{15}$.
B. $\frac{8}{15}$.
C. $\frac{14}{15}$.
D. $\frac{16}{15}$.

Lời giải:

Từ đồ thị hàm số $y=|f'(x)|$ với $a>0$ ta dễ dàng có được đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình bên.



Ta có $f'(x)=4ax^3+2bx$. Đồ thị hàm $y=f'(x)$ qua $(1;0)$ và $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ nên ta có hệ :

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{8\sqrt{3}}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+2b=0 \\ 4a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+2b\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{8\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=4x^3-4x$. Ta có: $f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3-4x)dx=x^4-2x+C$.

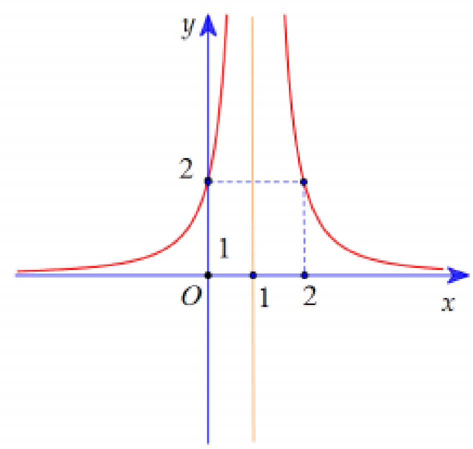
Do (C) tiếp xúc với đường thẳng Ox tại điểm có hoành độ x_0 nên

$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 4x_0^3-4x_0=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=\pm 1 \end{array}\right.$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại 2 điểm nên 2 điểm đó có hoành độ là ± 1. Suy ra $f(1)=0 \Leftrightarrow C=1 \Rightarrow (C): y=x^4-2x^2+1$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_{-1}^{1} \left| x^4 - 2x^2 + 1 \right| dx = \dfrac{16}{15} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(a,b,c,d \in \mathbb{R}; -\dfrac{d}{c} \neq 0 \right)$ có đồ thị (C), đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành có dạng



A. $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$. **B.** $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

C. $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$. **D.** $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$. Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy :

+ đồ thị $y = f'(x)$ có tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow -\dfrac{d}{c} = 1 \Rightarrow c = -d$ (1)

+ đồ thị $y = f'(x)$ qua điểm $(2;2) \Rightarrow \dfrac{ad - bc}{(2c+d)^2} = 2 \Rightarrow ad - bc = 2(2c+d)^2$ (2)

+ đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục tung tại $y = 2 \Rightarrow \dfrac{ad - bc}{d^2} = 2 \Rightarrow ad - bc = 2d^2$ (3)

Mà đồ thị $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 $\Rightarrow \dfrac{b}{d} = 3 \Rightarrow b = 3d$ (4)

Từ $(1),(2),(3),(4)$ ta có hệ $\begin{cases} c=-d \\ ad-bc=2(2c+d)^2 \\ ad-bc=2d^2 \\ b=3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=1 \\ d=-1 \end{cases} \Rightarrow y=f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$

Đồ thị (C) giao với Ox tại $(3;0)$. $f'(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(3)=\dfrac{1}{2}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(3;0)$ là : $y=\dfrac{1}{2}(x-3) \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***