MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA
VỀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT LIÊN QUAN SỐ PHỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bất đẳng thức tam giác:

- $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, dấu "=" khi $z_1 = kz_2$ với $k \ge 0$.
- $|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$, dấu "=" khi $z_1 = kz_2$ với $k \le 0$.
- $|z_1 + z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$, dấu "=" khi $z_1 = kz_2$ với $k \le 0$.
- $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$, dấu "=" khi $z_1 = kz_2$ với $k \ge 0$.

2. Công thức trung tuyến: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

3. Tập hợp điểm:

- $|z - (a + bi)| = r$: Đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính r.
- $|z - (a_1 + b_1 i)| = |z - (a_2 + b_2 i)|$: Đường trung trực của AB với $A(a_1; b_1), B(a_2; b_2)$.
- $|z - (a_1 + b_1 i)| + |z - (a_2 + b_2 i)| = 2a$:
  - Đoạn thẳng AB với $A(a_1; b_1), B(a_2; b_2)$ nếu $2a = AB$.
  - Elip (E) nhận A, B làm hai tiêu điểm với độ dài trục lớn là $2a$ nếu $2a > AB$.
    Đặc biệt $|z + c| + |z - c| = 2a$: Elip $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1 (*Sở GD Hưng Yên 2017*). Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 + i|$. Tính $S = M^2 + m^2$.

A. $S = 34$ B. $S = 82$ C. $S = 68$ D. $S = 36$

LỜI GIẢI 1. Ta có

$$4 = |z+2+i-(3+3i)| \ge ||z+2+i| - |3+3i|| = ||z+2+i| - 3\sqrt{2}| \Rightarrow \begin{cases} |z+2+i| \le 4 + 3\sqrt{2} = M \\ |z+2+i| \ge 3\sqrt{2} - 4 = m \end{cases}.$$

Khi đó $S = M^2 + m^2 = 68$.
Đáp án là C. □

VÍ DỤ 2 (*Sở GD Hà Tĩnh 2017*). Trong các số phức z thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$, gọi z_1 và z_2 là số phức có mô đun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức z_1 và z_2 bằng

A. $8i$ B. 4 C. -8 D. 8

LỜI GIẢI. Ta có

$$2 \geq ||z| - |2+4i|| = ||z| - 2\sqrt{5}| \Rightarrow 2\sqrt{5} - 2 \leq |z| \leq 2\sqrt{5} + 2.$$

Giá trị lớn nhất $|z|$ là $2\sqrt{5} - 2$ khi $z = k(2+4i)$ với $(k-1)\sqrt{5} = 1 \Rightarrow k = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Do đó

$$z_1 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2+4i).$$

Giá trị nhỏ nhất $|z|$ là $2\sqrt{5} - 2$ khi $z = k(2+4i)$ với $(1-k)\sqrt{5} = 1 \Rightarrow k = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Do đó

$$z_2 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2+4i).$$

Như vậy, tổng hai phần ảo của z_1, z_2 là $4\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) + 4\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = 8.$

Đáp án là D. [

VÍ DỤ 3 (*THPT Chuyên Thái Nguyên 2017 L3*). Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 + 4| = 2|z|$. Kí hiệu $M = \max|z|, m = \min|z|$. Tìm mô đun của số phức $w = M + mi$.

A. $|w| = 2\sqrt{3}$ B. $|w| = \sqrt{3}$ C. $|w| = 2\sqrt{5}$ D. $|w| = \sqrt{5}$

LỜI GIẢI. Ta có

$$2|z| \geq |z|^2 - 4 \Leftrightarrow |z|^2 - 2|z| - 4 \leq 0 \Rightarrow |z| \leq 1 + \sqrt{5} = M.$$

và

$$2|z| \geq 4 - |z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + 2|z| - 4 \geq 0 \Rightarrow |z| \geq -1 + \sqrt{5} = m.$$

Vậy $|w| = \sqrt{M^2 + m^2} = 2\sqrt{3}$.

Đáp án là A. □

VÍ DỤ 4 (*THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc 2017*). Trong các số phức z thỏa mãn $|2z+\overline{z}| = |z-i|$, tìm số phức có phần thực không âm sao cho $|z^{-1}|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $z = \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{i}{2}$ B. $z = \dfrac{i}{2}$ C. $z = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{i}{8}$ D. $z = \dfrac{\sqrt{6}}{8} + \dfrac{i}{8}$

LỜI GIẢI. Gọi $z = a + bi \quad (a \geq 0)$ thì $\overline{z} = a - bi$. Khi đó

$$\sqrt{9a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b-1)^2} \Leftrightarrow 2b = 1 - 8a^2 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} - 4a^2.$$

Ta có $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|}$ lớn nhất khi và chỉ khi $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nhỏ nhất.

$$|z|^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2} - 4a^2\right)^2 = 16a^4 - 3a^2 + \frac{1}{4} = \left(4a^2 - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{7}{64} \geq \frac{7}{64} \Rightarrow |z| \geq \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

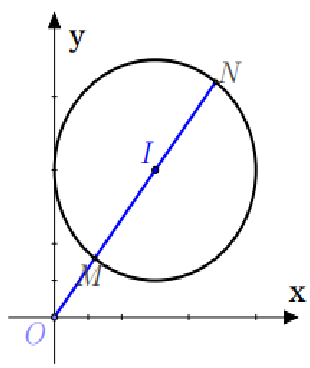
Do đó số phức z cần tìm thỏa mãn $\begin{cases} a^2 = \dfrac{3}{32} \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{6}}{8} \\ b = \dfrac{1}{2} - 4a^2 = \dfrac{1}{8} \end{cases}$. Vậy $z = \dfrac{\sqrt{6}}{8} + \dfrac{i}{8}$.

Đáp án là D. □

VÍ DỤ 5 (*THPT Phan Bội Châu-Đăk Lăk 2017*). Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = 1$. Mô đun lớn nhất của số phức z là:

A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

LỜI GIẢI.



Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn giả thiết là đường tròn tâm $I(3;4)$ bán kính $r = 3$. Khi đó $|z| = OM$ với O là gốc tọa độ. Do đó

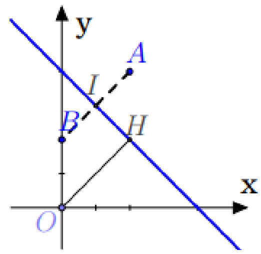
$$\max |z| = OI + r = 5 + 1 = 6.$$

Đáp án là B. □

VÍ DỤ 6 (*THPT Đồng Quan-Hà Nội 2017,THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam 2017*). Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2-4i| = |z-2i|$. Tìm số phức z có mô đun nhỏ nhất

A. $z = 2-2i$ B. $z = 1+i$ C. $z = 2+2i$ D. $z = 1-i$

LỜI GIẢI.



Gọi $A(2;4), B(0;2)$, tập hợp các điểm z thỏa mãn giả thiết đề bài là đường trung trực d của AB có phương trình $x+y-4=0$. Khi đó $|z| = OM$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của O trên d là $H(2;2)$.

Đáp án là C. □

VÍ DỤ 7 (*THPT Trần Phú-Hà Nội 2017*). Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|+|z-3| = 10$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

LỜI GIẢI. Gọi $A(-3;0), B(3;0)$ có trung điểm là $O(0;0)$. Điểm M biểu diễn số phức z. Theo công thức trung tuyến thì

$$|z|^2 = MO^2 = \frac{MA^2+MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}.$$

Ta có

$$MA^2+MB^2 \geq \frac{(MA+MB)^2}{2} = 50$$

Do đó

$$m = \sqrt{\frac{50}{2} - \frac{36}{4}} = 4.$$

Vậy $\min|z| = 4$.

Đáp án là B. □