



MỘT SỐ BÀI TOÁN

ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

Biên soạn: Nguyễn Thành Trung¹

BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Câu 1. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15m / s$ thì tăng vận tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t (m / s^2)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

- A. 68,25m. B. 70,25m. C. 69,75m. D. 67,25m.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$v(t) = \int (t^2 + 4t) dt = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + C. \text{ Mà } v(0) = 15 \Rightarrow C = 15 \text{ nên}$$

$$v(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 15$$

$$S(t) = \int_0^3 \left(\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 15 \right) dt = \left(\frac{1}{12}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + 15t \right) \Big|_0^3 = \frac{279}{4} = 69,75 (m).$$

Câu 2. Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t (m / s)$. Tính quãng đường S mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0(s)$ đến thời điểm vật dừng lại.

- A. $S = 2560m$. B. $S = 1840m$. C. $S = 2180m$. D. $S = 1280m$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Vật dừng lại thì } v(t) = 0 \Rightarrow 160 - 10t = 0 \Rightarrow t = 16(s).$$

$$S = \int_0^{16} (160 - 10t) dt = 1280.$$

¹ GV Tổ Toán : 0949.686.357

Câu 3 [TLT Diệm Hiền- Cần Thơ] Một hạt proton di chuyển trong điện trường có gia tốc

$$a(t) = \frac{-20}{(2t+1)^2} \text{ (cm/s}^2\text{)} \text{ với } t \text{ tính bằng giây. Tìm hàm vận tốc } v \text{ theo } t, \text{ biết rằng}$$

khi $t = 0$ thì $v = 30 \text{ cm/s}$.

- A. $\frac{-20}{2t+1} + 30$. B. $\frac{10}{2t+1}$. C. $\frac{10}{2t+1} + 20$. D. $(2t+1)^{-3} + 30$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

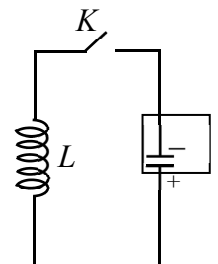
$$\text{Để thấy } v(t) = \int \frac{-20}{(2t+1)^2} dt = \frac{10}{2t+1} + C \text{ (cm/s)}$$

$$\text{Khi } t = 0 \text{ thì } v = 30 \text{ cm/s} \Rightarrow v(0) = \frac{10}{2 \cdot 0 + 1} + C = 30 \Leftrightarrow C = 20$$

$$\text{Do đó } v(t) = \frac{10}{2t+1} + 20 \text{ (cm/s)}.$$

BÀI TOÁN ĐIỆN LƯỢNG

Câu 4. Cho mạch điện như hình vẽ dưới. Lúc đầu tụ điện có điện tích $Q_0 (C)$. Khi đóng khóa K , tụ điện phóng điện qua cuộn dây L . Giả sử cường độ dòng điện tại thời điểm t phụ thuộc vào thời gian theo công thức $I = I(t) = Q_0 \omega \cos(\omega t) (A)$, trong đó ω (rad/s) là tần số góc, $t \geq 0$ có đơn vị là giây (s). Tính điện lượng chạy qua một tiết diện thẳng của dây từ lúc bắt đầu đóng khóa $K (t = 0)$ đến thời điểm $t = 6 (s)$.



- A. $Q_0 \omega \sin(6\omega) (C)$ B. $Q_0 \sin(6\omega) (C)$ C. $Q_0 \omega \cos(6\omega) (C)$ D. $Q_0 \cos(6\omega) (C)$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có biểu thức của cường độ dòng điện tại thời điểm t phụ thuộc vào thời gian là biểu thức đạo hàm của biểu thức điện lượng chạy qua tiết diện thẳng của dây, hay nói cách khác

$$\text{Điện lượng chạy qua tiết diện } S \text{ trong thời gian từ } t_1 \text{ đến } t_2 \text{ là } \Delta q = \int_{t_1}^{t_2} i \cdot dt.$$

$$\text{Vậy } \Delta q = \int_0^6 Q_0 \omega \cos(\omega t) dt = Q_0 \sin(\omega t) \Big|_0^6 = Q_0 \sin(6\omega) (C).$$

BÀI TOÁN DIỆN TÍCH

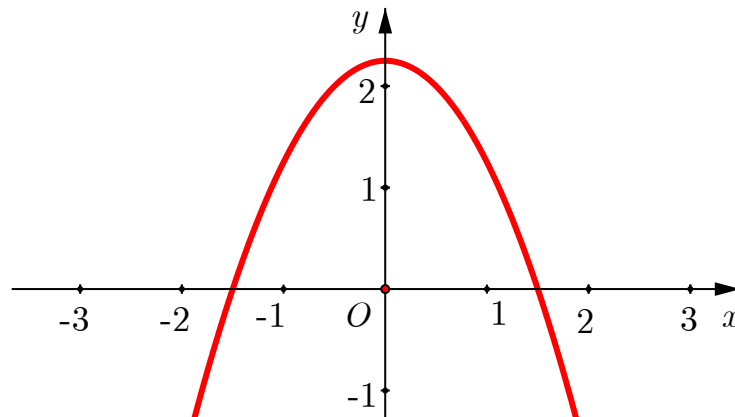
Câu 5. Thày Trung làm một cái cửa hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thành mỗi mét vuông là 1.350.000 đồng. Số tiền phải trả là:

- A.** 1.147.500 đồng. **B.** 3.375.000 đồng. **C.** 6.075.000 đồng. **D.** 3.037.500 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Bước 1. Tính diện tích cần sơn



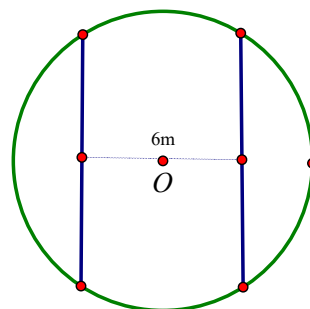
Chọn hệ trục như hình vẽ. Phương trình Parabol là $y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

Diện tích mái vòm là $S = \left| \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx \right| = \frac{9}{2}$.

Bước 2. Nhân đơn giá

Số tiền cần trả: $\frac{9}{2} \cdot 1350000 = 6075000$.

Câu 6. Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng / m^2 . Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



- A.** 8412322 đồng. **B.** 8142232 đồng. **C.** 4821232 đồng. **D.** 4821322 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là $x^2 + y^2 = 36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y = \sqrt{36 - x^2} = f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -3; x = 3$

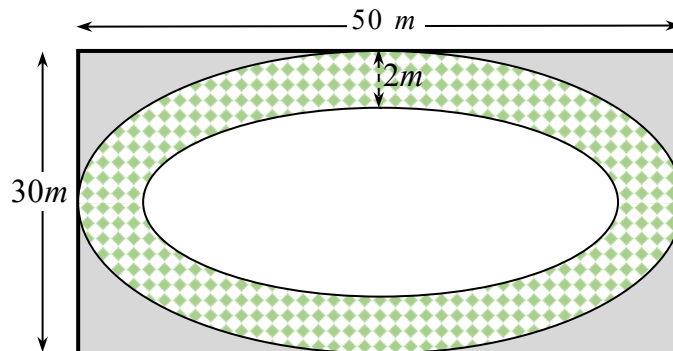
$$\Rightarrow S = 2 \int_{-3}^3 \sqrt{36 - x^2} dx$$

Đặt $x = 6 \sin t \Rightarrow dx = 6 \cos t dt$. Đổi cận: $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}; x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow S = 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 36 \cos^2 t dt = 36 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1) dt = 18 (\sin 2t + 2t) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3} + 12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S \approx 4821322$ đồng.

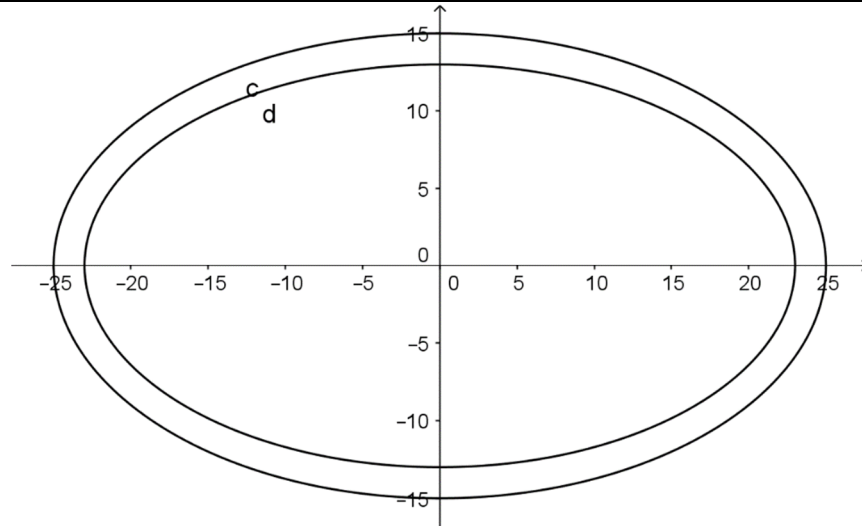
Câu 7. (THPT Hà Huy Tập – Hà Tĩnh) Một sân chơi dành cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài $50m$ và chiều rộng là $30m$ người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí để làm mỗi m^2 làm đường 500.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



- A. 119000000. B. 152000000. C. 119320000. D. 125520000.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Cách 1

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt gốc tọa độ O vào tâm của hình Elip.

Phương trình Elip của đường viền ngoài của con đường là $(E_1): \frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{30^2} = 1$.

Phần đồ thị của (E_1) nằm phía trên trục hoành có phương trình

$$y = 30\sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}} = f_1(x).$$

Phương trình Elip của đường viền trong của con đường là $(E_2): \frac{x^2}{48^2} + \frac{y^2}{28^2} = 1$.

Phần đồ thị của (E_2) nằm phía trên trục hoành có phương trình

$$y = 28\sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}} = f_2(x).$$

Gọi S_1 là diện tích của (E_1) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y = f_1(x)$. Gọi S_2 là diện tích của (E_2) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y = f_2(x)$.

Gọi S là diện tích con đường. Khi đó

$$S = S_1 - S_2 = 2 \int_{-50}^{50} 30\sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}} dx - 2 \int_{-48}^{48} 28\sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}} dx.$$

Tính tích phân $I = 2 \int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx, (a, b \in \mathbb{R}^+)$.

$$\text{Đặt } x = a \sin t, \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = a \cos t dt.$$

$$\text{Đổi cận } x = -a \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$



$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot a \cos t \, dt = 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) \, dt \\ &= ab \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi. \end{aligned}$$

Do đó $S = S_1 - S_2 = 50.30\pi - 48.28\pi = 156\pi$.

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là $600000.S = 600000.156\pi \approx 294053000$ (đồng).

Cách 2: Sử dụng trực tiếp công thức đã có

Gọi S là diện tích của elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ta có $S = \pi ab$.

Xét hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục hoành và trục tung lần lượt là các trục đối xứng của hình chữ nhật trong đó trục hoành dọc theo chiều dài của hình chữ nhật.

Gọi (E_1) là elip lớn, (E_2) là elip nhỏ ta có:

$$(E_1): \frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1 \Rightarrow \text{Diện tích của nó là } S_1 = \pi \cdot 25 \cdot 15 = 375\pi.$$

$$(E_2): \frac{x^2}{23^2} + \frac{y^2}{13^2} = 1 \Rightarrow \text{Diện tích của nó là } S_2 = \pi \cdot 23 \cdot 13 = 299\pi.$$

Diện tích con đường là $375\pi - 299\pi = 76\pi$.

Do đó số tiền đầu tư là $76\pi * 500.000 \approx 119320000$

THỂ TÍCH VẬT THỂ

Câu 8. Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq 2)$ ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$.

Tính thể tích của phần vật thể B .

- A. $V = \frac{4}{3}$. B. $V = \frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $V = 4\sqrt{3}$. D. $V = \sqrt{3}$.

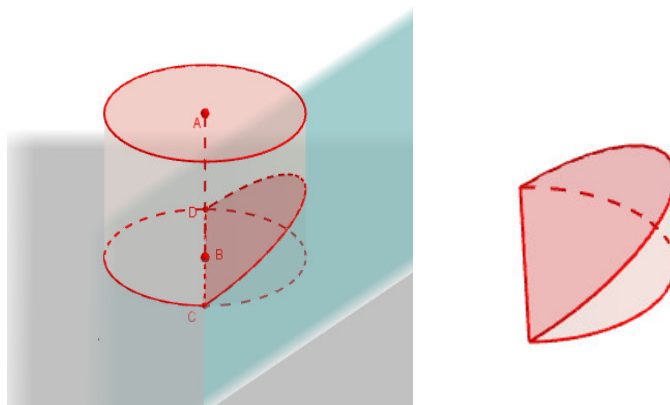
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Áp dụng công thức $V = \int_a^b S(x) \, dx$ ta có kết quả cần tính

$$V = \int_0^2 \frac{(x\sqrt{2-x})^2 \sqrt{3}}{4} \, dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 x^2 (2-x) \, dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

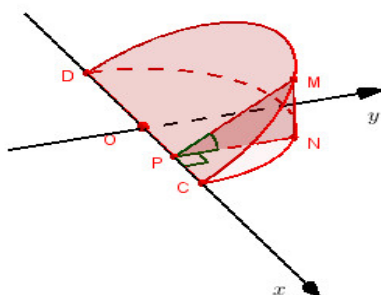
Câu 9. [THPT Quảng Xương 1 – Thanh Hóa] Một vật thể bằng gỗ có dạng khối trụ với bán kính đáy bằng 10 (cm) . Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng có giao tuyến với đáy là một đường kính của đáy và tạo với đáy góc 45° . Tính thể tích của khối gỗ bé.



- A. $\frac{2000}{3}\text{ (cm}^3\text{)}$. B. $\frac{1000}{3}\text{ (cm}^3\text{)}$. C. $\frac{2000}{7}\text{ (cm}^3\text{)}$. D. $\frac{2000}{9}\text{ (cm}^3\text{)}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó khúc gỗ bé có đáy là nửa hình tròn có phương trình: $y = \sqrt{100 - x^2}$, $x \in [-10, 10]$

Một mặt phẳng cắt vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , $x \in [-10, 10]$, cắt khúc gỗ bé theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ (xem hình).

Để thấy $NP = y$ và $MN = NP \tan 45^\circ = y = \sqrt{100 - x^2}$.

$$S(x) = \frac{1}{2} MN \cdot PN = \frac{1}{2} (100 - x^2)$$

Khi đó thể tích khúc gỗ bé là: $V = \int_{-10}^{10} S(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-10}^{10} (100 - x^2) dx = \frac{2000}{3}\text{ (cm}^3\text{)}$.

Tài liệu tham khảo

1. Đề thi thử THPT năm 2017
2. Đề Minh họa lần 2 – BGD&ĐT