

PHƯƠNG PHÁP QUY ĐỔI TRIỆT HẠ “TAM GIÁC CỰC TRỊ” CỦA HÀM $y = x^4 + bx^2 + c$

VỖ TRỌNG TRÍ

Quy đổi mọi hàm số bậc 4 về dạng: $y = x^4 - 2a^2x^2, a > 0$ (quãng hệ số tự do), khi đó “tam giác cực trị” ABC có tọa độ $A(0;0), B(-a; -a^2), C(a; -a^2)$, cạnh đáy BC và đường cao AH tính theo công thức $BC = 2x_c = 2a, AH = |y_A - y_C| = a^4$

Ví dụ 1: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + m^4 + m + 2$ có tam giác cực trị là tam giác đều.

Giải: Quy đổi hàm số trên về hàm số $y = x^4 - 2a^2x^2, a > 0$, với $4(m-1) = 2a^2 \Rightarrow m = 1 + \frac{a^2}{2}$

Tam giác cực trị đều khi và chỉ khi: $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}BC \Leftrightarrow a^4 = \sqrt{3}a \Leftrightarrow a^2 = \sqrt[3]{3}$. Vậy đáp số bài toán

là: $m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

Ví dụ 2: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 3$ có “tam giác cực trị” là tam giác vuông?

Giải: Quy đổi hàm số trên về dạng $y = x^4 - 2a^2x^2, a > 0$ với $m = a^2$

Tam giác cực trị vuông khi và chỉ khi $AH = \frac{BC}{2} \Leftrightarrow a^4 = a \Leftrightarrow a = 1$. Vậy đáp số: $m = 1$.

Ví dụ 3: Tìm m để tam giác cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^4 + m + 10$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

Giải: Quy đổi hàm số đã cho về dạng $y = x^4 - 2a^2x^2, a > 0$, với $m = a^2$. Tam giác ABC có $A(0;0)$

suy ra tâm $I(0; -1), C(a; -a^4)$. Ta có $IC=1$ nên $a^2 + (1 - a^4)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$. Vậy đáp số là

$\begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Ví dụ 4: Tìm m để tam giác cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có một góc bằng 120° .

Giải: Quy đổi hs đã cho về dạng $y = x^4 - 2a^2x^2$ với $m = -a^2$. Do tam giác ABC có $A=120^\circ$, nên

góc $B = 30^\circ \Rightarrow \tan B = \frac{2AH}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a^4}{a} = a^3 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Vậy đáp số: $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.